INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE GEOLOGIE APPLIQUEE & DE PROSPECTION MINIERE

Concours de 1978

Composition de MATHEMATIQUES

Les candidats sont invités à soigner l'écriture, la présentation et la rédaction.

- I -

On considère trois réels d_1 , d_2 , d_3 strictement positifs avec $d_1 + d_2 + d_3 = 1$, et trois réels quelconques x, y, z tels que $x \leqslant y \leqslant z$.
Montrer que

a) $\inf (d_1 , d_2 , d_3) < \frac{1}{2}$ et $\sup (d_1 , d_2 , d_3) < 1$

b) $x \leqslant d_1 x + d_2 y + d_3 z \leqslant z$.

- II -

On donne la matrice réelle $M = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$ dont les éléments sont strictement positifs et vérifient $a + b + c = a' + b' + c' = a'' + b'' + c'' = 1$.
On désigne par ε la borne inférieure de l'ensemble des éléments de M. On envisage trois suites (U_n) , (V_n) , (W_n) de termes généraux respectifs U_n , V_n , W_n définies par la donnée de U_o , V_o , W_o , réels appartenant à $]0, 1[$ et par la relation matricielle $(U_n \ V_n \ W_n) = (U_{n-1} \ V_{n-1} \ W_{n-1}) M$.
Pour tout entier naturel n , on ordonne U_n , V_n , W_n en une suite non décroissante α_n , β_n , γ_n en posant $\alpha_n = \inf (U_n, V_n, W_n)$ et $\gamma_n = \sup (U_n, V_n, W_n)$ avec $\alpha_n \leqslant \beta_n \leqslant \gamma_n$. On pose enfin $\gamma_n - \alpha_n = \ell_n$.

1°) a) Montrer que l'on peut écrire $\gamma_n = d_1 \alpha_{n-1} + d_2 \beta_{n-1} + d_3 \gamma_{n-1}$, (d_1 , d_2 , d_3) étant une permutation des éléments d'une certaine colonne de M. En déduire que la suite (γ_n) de terme général γ_n a une limite et aussi que $\gamma_{n-1} - \gamma_n \geqslant \varepsilon \ell_{n-1}$.

b) Montrer, de même, que la suite (α_n) a une limite et que $\alpha_n - \alpha_{n-1} \geqslant \varepsilon \ell_{n-1}$.

2°) a) Etablir que $\ell_n \leqslant (1 - 2\varepsilon) \ell_{n-1}$ et en déduire la limite de ℓ_n pour n infini.

.../...

b) Montrer que les trois suites (U_n) , (V_n) , (W_n) ont une limite commune L (qu'on ne demande pas) et qui vérifie $0 < L < 1$.

c) En posant $\rho = 1 - 2\delta$, montrer que $|U_n - L| < \rho^n$.

3°) a) On pose, pour tout entier n supérieur à 1 $M^n = M^{n-1} \times M$

avec $M^n = \begin{pmatrix} a_n & a'_n & a''_n \\ b_n & b'_n & b''_n \\ c_n & c'_n & c''_n \end{pmatrix}$

les éléments de M^n étant les termes généraux de suites réelles. Montrer que ces suites ont des limites et que la matrice $\mathcal{M}$ (dite "limite de M^n pour n infini") obtenue en remplaçant dans M^n les éléments par leurs limites est de la forme

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} P & P & P \\ Q & Q & Q \\ R & R & R \end{pmatrix}$$

où P, Q, R sont trois nombres positifs vérifiant $P + Q + R = 1$.

b) Exprimer a_n , b_n , c_n en fonction de a_{n-1} , b_{n-1} , c_{n-1} et des éléments de M.
(On pourra remarquer que $M^{n-1} \times M = M \times M^{n-1}$). On suppose alors

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Calculer effectivement P, Q, R (qu'on ne demande pas dans le cas général).

4°) On considère un mobile cheminant aléatoirement entre trois positions S , S', S"; lorsqu'il est en S, et quel que soit le chemin qu'il a suivi pour y parvenir, les probabilités qu'il reste en S [étape (S, S)] , qu'il aille en S' [étape (S, S')] , qu'il aille en S" [étape (S, S")] sont respectivement a, b, c. De même les probabilités des étapes (S', S), (S', S') , (S' , S") ,(S", S), (S", S') , (S" , S") sont respectivement a', b', c' , a" , b" , c" . Les probabilités que le premier départ s'effectue de S, S' ou S" sont respectivement p_o , q_o , r_o . Les douze probabilités précédentes sont données strictement positives et telles que $a + b + c = a' + b' + c' = a'' + b'' + c'' = p_o + q_o + r_o = 1$. Enfin on appelle p_n , q_n , r_n les probabilités pour qu'après la n ième étape les positions du mobile soient respectivement S, S' ou S".

.../...

Montrer qu'il existe une matrice A ne dépendant pas de n et qu'on précisera telle que

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \\ r_{n-1} \end{pmatrix}$$

En déduire que p_n , q_n , r_n ont, pour n infini, des limites respectives P, Q, R (qu'on ne demande pas) indépendantes de p_o , q_o, r_o .

- III -

Soit X_i la variable aléatoire égale à 1 si l'arrivée de la i-ième étape a lieu en S, et à zéro sinon. La notation $E[X]$ désigne l'espérance de la variable aléatoire X .

1°) a) Quelle est la loi de X_i ? Etablir que $E\left[(X_i - P)^2\right]$ est majorée par un réel indépendant de i.

b) j étant un entier supérieur à i , on note p' la probabilité que $X_j = 1$ sachant que $X_i = 1$. Montrer que $|p' - P| \leq \rho^{j-i}$

Etablir que $\left|E\left[(X_i - P)\ (X_j - P)\right]\right| \leq \rho^j + \rho^{j-i}$

c) Calculer, n étant un entier supérieur ou égal à 2

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (\rho^j + \rho^{j-i})$$ en fonction de ρ et de n .

(La sommation est étendue à tous les entiers i et j tels que $1 \leq i < j \leq n$).

2°) a) Que représente la variable aléatoire $F_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$?

Etablir successivement que

$$(F_n - P)^2 = \frac{1}{n^2} \left[\sum_{k=1}^{n} (X_k - P)\right]^2 \quad \text{puis que}$$

$$(F_n - P)^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} (X_k - P)^2 + \frac{2}{n^2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (X_i - P)\ (X_j - P)$$

b) Montrer que, pour n infini $E\left[(F_n - P)^2\right]$ tend vers zéro. Etablir que $E\left[(F_n - P)^2\right] \geq \left(E\left[F_n - P\right]\right)^2$. En déduire que pour n infini, $E\left[(F_n - P)\right]$ tend vers zéro. - FIN -

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail